

Dimensionierung von Entkopplungspuffern in dynamischen Fertigungsprozessen mittels Warteschlangen

MENG FELISIA SUNARJO
 DR.-ING. INGOLF MEINHARDT
 PROF. DR.-ING. HABIL. HANS-GEORG MARQUARDT
 INSTITUT FÜR FÖRDERTECHNIK, BAUMASCHINEN UND LOGISTIK
 TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Zusammenfassung

Aufgrund eines zufälligen, weil nicht exakt vorhersehbaren Eintreffens von Fertigungsaufträgen und Ausgangsmaterialien (Anlieferung von Zulieferern, Bereitstellung aus einem Lager) an einem ersten Fertigungsbereich und einer nicht konstanten Durchlaufzeit kommt es zu einer unregelmäßigen Bereitstellung der bearbeiteten Aufträge an dem sich anschließenden zweiten Fertigungsbereich. Um dort jedoch eine hohe Auslastung zu erzielen, wird eine kontinuierliche Bearbeitung und damit getaktete Bereitstellung angestrebt. Die Lösung ist ein Zwischenspeicher oder Puffer, der die beiden Prozesse entkoppelt. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem die Verteilung der Pufferbelegung auf analytischem Wege bestimmt und damit die erforderliche Größe des Entkopplungspuffers mit einer vorgegebenen statistischen Sicherheit abgeleitet werden kann.

Abstract

Due to a random, because not exactly foreseeable arriving of production orders and basic materials (delivery of supplier, retrieval from a storage area) on a first production area and a not constant transmission delay it comes to an irregular delivery of the finished orders at the second production area following. To achieve a high extent of utilisation there, nevertheless, a continuous treatment with constant supply is aimed. The solution is an intermediate buffer, which decouples the two processes. In this article a method is introduced which determines the distribution of the buffer occupancy on an analytical way and allows an estimation of the required size of the decoupling buffer with a predefined statistical safety.

1. Einführung

Die Bestimmung der optimalen Puffergröße zur Entkopplung von Prozessen in einer Prozesskette ist ein kritisches Problem bei der Planung von Produktions- und Materialflusssystemen. Produktionssysteme orientieren sich in bestimmten Bereichen sehr häufig an einer getakteten Arbeitsweise, um ganze Fertigungslinien effizient zu gestalten. Aus Kapazitätsgründen kann es aber notwendig sein, bestimmte Teilprozesse mit größerem Zeitbedarf innerhalb der Fertigung parallel anzuordnen, damit die mittlere Bearbeitungszeit für den Teilprozess nicht größer als die Taktzeit der Fertigungslinie ist. Zudem erlauben integrierte Entscheidungspunkte (Qualitätskontrolle) sowohl alternative (nur bei Qualitätsmängeln: Nachbearbeitung) als auch mehrfache (zyklische) Prozessfortsetzungen, sodass letztendlich kein sequenzieller Durchlauf durch den Produktionsbereich erfolgt (Abb. 1).

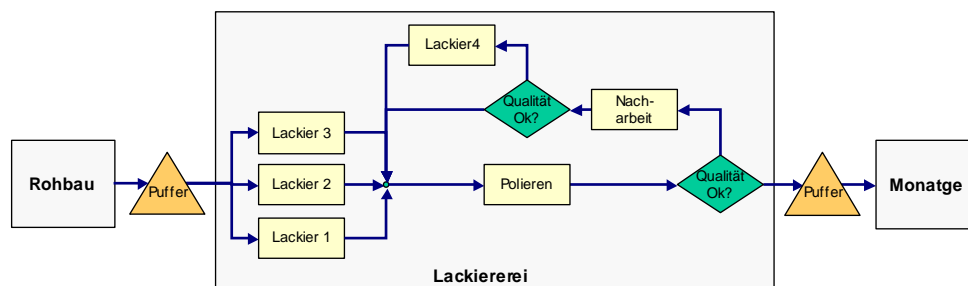


Abbildung 1: Prinzip-Darstellung „Farbgebung“ in der Automobilindustrie

Aufgrund der damit entstandenen Möglichkeit des Überholens beim Durchlaufen des Prozesses bleibt die ursprüngliche Sequenz der Produktionseinheiten nicht erhalten. Am Ende verlassen die Einheiten in veränderter Reihenfolge und mit mehr oder weniger zufälligen Zeitabständen den Prozess zur Weiterbearbeitung (z. B. Endmontage). Um hier wieder eine hohe und gleichmäßige Auslastung der Ressourcen (Maschinen, Arbeitskräfte) zu erhalten, wird zwischen beiden Prozessen ein Puffer zur Entkopplung eingerichtet (Zwischenlager, Speicherbahnen, Stauförderer o. ä.).

Für den Planer ergibt sich die Frage nach der erforderlichen Größe des Puffers (Zahl der Pufferplätze, Flächenbedarf, technische Ausrüstungen usw.). Bisher kann dieses Problem nur mithilfe der Simulation zufriedenstellend gelöst werden. Generell sollte der Puffer in jedem Fall so groß dimensioniert werden, dass er den nachfolgenden Prozess in jedem Takt versorgen kann. Andererseits sollte er aber begrenzt werden aufgrund des beschränkten Platzangebots innerhalb der Fertigungslinie und der anfallenden Kosten. In [Meinhardt06a] ist in einem ersten Schritt eine analytische Lösung entwickelt worden für die optimale Puffergröße zur Entkopplung in einer durchgängig getakteten Fertigungslinie (z. B. in der Automobilindustrie). Vielfach treten aber auch nicht getaktete Ankunftsprozesse auf. So erfolgt beispielsweise der Wareneingang im Unternehmen aufgrund von festgelegten Bestellmengen, Ladungsgrößen oder Lieferterminen im Allgemeinen in zufälligen Zeitabständen, während die Produktion getaktet arbeitet.

Das Thema einer Dimensionierung von Entkopplungspuffern findet man in der Literatur kaum. Die meisten Arbeiten über Entkopplungsprozesse diskutieren das Thema hinsichtlich der Konfiguration und Anordnung von Entkopplungspunkten innerhalb der Fertigungslinie [VanDonk01], [Herer02] und [Moron03]. Das Problem des Entkopplungspuffers als Zwischenlager in einem zweistufigen Fertigungsprozess [Bell80] beruht auf der Analyse verschiedener Alternativen von Lagerkonfigurationen unter Berücksichtigung der Kosten. Die Belegung von Entkopplungspuffern für mehrstufige Fertigungspläne wird in [Vercellis99] betrachtet.

Der folgende Artikel beschreibt einen anderen, analytischen Ansatz zur Dimensionierung des Entkopplungspuffers. Das Verfahren basiert auf einem Warteschlangenmodell und wird für den Fall eines poissonverteilten Ankunftsstrom entwickelt und mit Simulationsergebnissen verglichen.

2. Modell des Entkopplungspuffers

Es wird eine Fertigungslinie, bestehend aus zwei Prozessen und einem Puffer modelliert (siehe Abb. 2). Die zufällige Durchlaufzeitverteilung der Einheiten beim Prozess A führt auf Grund der eingangs geschilderten internen Prozessabläufe mit alternativen und/oder zyklischen Prozessstrukturen zu einer unregelmäßigen Ankunft im Puffer. Gleichzeitig entnimmt Prozess B eine Einheit in konstantem Zeitabstand (Takt) aus diesem Puffer. Es stellt sich die Frage nach der notwendigen Größe des Puffers, um mit ausreichender Sicherheit Prozess B versorgen zu können.

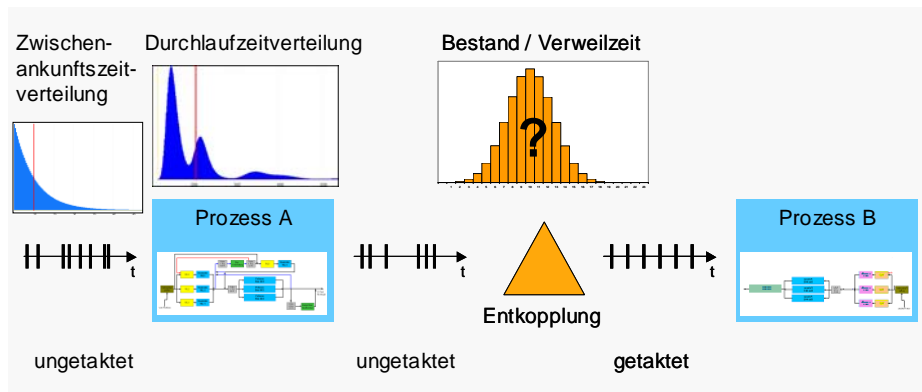


Abbildung 2: Modell einer Fertigungslinie mit Entkopplungspuffer

Zunächst soll vorausgesetzt werden, dass die Kapazität der Ressource beim Prozess A unbegrenzt ist, also keine Warteplätze vor dem Prozess A erforderlich sind. Ankommende Einheiten können sofort bedient werden, das heißt die Bearbeitung beginnt augenblicklich mit deren Eintreffen. Die Dauer der Bearbeitung wird durch verschiedene Faktoren beeinflusst, die letztendlich zu einem stochastischen Durchlaufzeit-Verhalten führen, dessen statistische Verteilung aber bekannt ist. Mit dem Verlassen von Prozess A erreichen die Einheiten den Entkopplungspuffer. Prozess B arbeitet getaktet und entnimmt nur zu definierten Zeitpunkten eine Einheit aus dem Puffer. Der Zweck des Entkopplungspuffers, die Zeitschwankungen beim Eintreffen auszugleichen und den nachfolgenden Prozess in vorgegebenen Zeitabständen (Zeittakte) zu versorgen, führt dazu, dass sich im Puffer ein bestimmter Bestandsverlauf ausbildet.

Mithilfe der Warteschlangentheorie kann das Verhalten des Systems analysiert werden. Der Entkopplungspuffer wird als Warteraum eines Bediensystems betrachtet, wobei der Abgang von Prozess A als Ankunftsprozess und der Entnahmeabstand (Takt) beim Prozess B als konstante Bedienzeit betrachtet werden. Für eine generelle Verteilung des Ankunftsstroms ist es schwierig, den Abgangsstrom von A und damit die Verteilung der Zwischenankunftszeiten am Entkopplungspuffer zu definieren. Für den Spezialfall eines poissonverteilten Ankunftsstroms gilt dagegen, dass der Abgangsstrom ebenfalls poissonverteilt ist.

Der Bedienprozess unterscheidet sich allerdings geringfügig von dem, wie er in der Warteschlangentheorie üblicherweise verstanden wird. Dort entsteht die Warteschlange im Ergebnis des Wartens auf Bedienung: Die Forderungen warten, bis die Bedienstation frei ist, es gibt also eine Abhängigkeit vom aktuellen Zustand. Im Modell hier wird aber auf die nächste Entnahme durch den nachfolgenden Prozess gewartet. Diese Entnahme erfolgt zu definierten Zeitpunkten und unabhängig vom aktuellen Zustand. Das führt zu einem unterschiedlichen Verhalten der Systeme und zu unterschiedlichen mittleren Warteschlangenlängen in den beiden Modellen.

Entsprechend der Kendall'schen Notation wird das betrachtete Modell mit $M/D'/1$ bezeichnet, wobei das D' auf eine Abwandlung der getakteten (deterministischen) Bedienung verweist: Die Bedienstation nimmt nur zu durch einen Zeittakt vorgegebenen Zeitpunkten eine Forderung zur Bearbeitung auf. (Diese Verteilung kann z.°B. auch beobachtet werden, wenn Personen mit einem Skilift fahren wollen.)

3. Analytisches Verfahren mittels Warteschlangentheorie

Ankommende Forderungen werden – im Gegensatz zum $M/D/1$ -System – im Falle eines leeren Bediensystems nicht sofort bedient, sondern verbleiben bis zum Beginn des nächsten Taktes in der Warteschlange. Die Einheiten verbleiben also im Mittel länger im System und müssen daher zu einer Verschiebung der Zustandswahrscheinlichkeiten führen: die Wahrscheinlichkeiten für eine geringe Anzahl von Forderungen beim $M/D'/1$ -System sind geringer als die des $M/D/1$ -Systems. Entsprechend größer sind dann die Wahrscheinlichkeiten für eine größere Anzahl von Forderungen im System. Diese Annahme konnte mittels Simulation bestätigt werden. Abbildung 3 zeigt die Auswertung von Simulationsergebnisse für die Zustandswahrscheinlichkeiten beider Systeme mit einem angenommenen Auslastungsgrad $\rho = 0,8$.

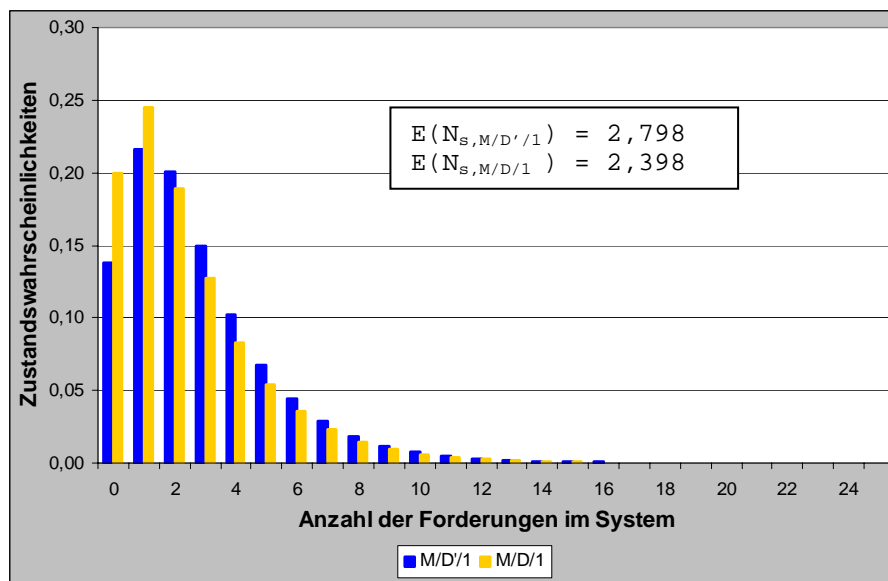


Abbildung 3: Simulationsergebnis: Verteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten für $M/D'/1$ und $M/D/1$

Allgemein gilt für die Zahl der Forderungen im System der Zusammenhang

$$N_s(t) = N_w(t) + N_b(t) \quad (1)$$

Darin bedeuten

$N_s(t)$ die gesamte Anzahl der Forderungen im System zum Zeitpunkt t ,

$N_w(t)$ die Anzahl der wartenden Forderungen zum Zeitpunkt t und

$N_b(t)$ die Anzahl der Forderungen, die zum Zeitpunkt t gerade bedient werden.

Da es sich hier um ein Warteschlangensystem mit nur einer Bedienstation handelt, kann $N_b(t)$ nur die Zahlenwerte 0 oder 1 annehmen.

Im M/D/1-System bedeutet „eine Forderung im System“ stets, dass diese Forderung gerade bedient wird und demnach die Warteschlange leer ist. Oder anders formuliert: Immer dann, wenn das System nicht leer ist, erfolgt auch eine Bedienung.

$$N_b(t) = \min(N_s(t), 1) \quad (2)$$

Etwas anders verhält es sich im M/D'/1-System: Eine ankommende Forderung wartet wegen der getakteten Arbeitsweise zunächst in der Warteschlange bis zum nächsten Bedienzeitpunkt. Für eine gewisse Zeit befindet sich also eine Forderung im System und wartet ($N_s(t) = N_w(t) = 1$), während die Bedienstation leer ist ($N_b(t) = 0$). Mit Erreichen des Bedienzeitpunktes ändert sich der Systemzustand ($N_s(t) = N_b(t) = 1$, $N_w(t) = 0$), ohne dass sich die Anzahl der Forderungen im System verändert. Dieser Zustand ist wieder identisch mit dem oben beschriebenen Fall des M/D/1-Systems (Abb. 4), tritt aber wie gesagt nicht mit der Ankunft einer Forderung, sondern zeitverzögert ein.

Zur Beschreibung des Systemzustandes wird im M/D/1-System ausschließlich die Zahl der Forderungen ($N_s(t)$) im System verwendet. Wegen des gerade erläuterten Ablaufs im M/D'/1-System ist dies hier nicht mehr ausreichend, es muss eine zusätzliche Unterscheidung vorgenommen werden. Aus diesem Grund erfolgt die Beschreibung des Systemzustands in der Form $\{N_w(t), N_b(t)\}$. Der Zustand $N_s(t) = 1$ im M/D/1-System wird danach im M/D'/1-System durch die Zustände $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$ dargestellt.

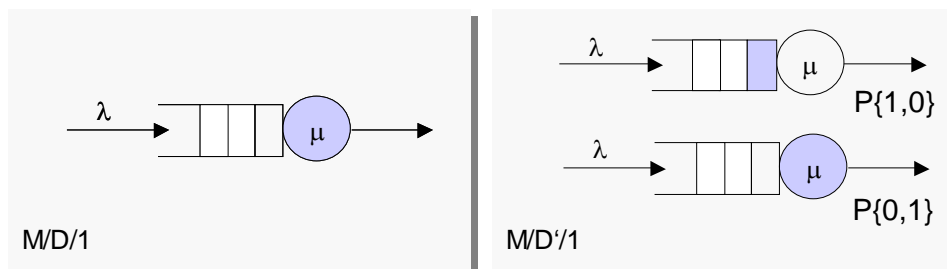


Abbildung 4: Systemzustand „eine Forderung im System“ bei M/D/1 bzw. M/D'/1

Wenn es n Forderungen im System gibt, sind die Zustände $\{n, 0\}$ bzw. $\{n-1, 1\}$ möglich. Mit wachsenden n konvergiert $P\{n, 0\}$ gegen 0. Dieser Fall entsteht nur dann, wenn in einem leeren Bediensystem innerhalb des nächsten Taktes n Forderungen eintreffen. Der zweite Fall $\{n-1, 1\}$ ergibt sich, wenn $(n - k)$ Forderungen im System sind und innerhalb des nächsten Taktes k Forderungen eintreffen.

Das Verhalten des Puffers lässt sich damit als erweitertes Warteschlangenmodell mit sogenannten *vacations* auffassen. Bei diesem erweiterten Modell geht der Server für eine bestimmte Zeit in "Urlaub" (engl.: *vacation*), sobald keine Aufträge mehr zur Abarbeitung vorliegen.

Bei derartigen Warteschlangensystemen werden die grundlegenden Ergebnisse zur Leistungsbewertung (z.°B. Verteilung der Anzahl der Forderungen, der Wartezeit, der Durchlaufzeit o.°ä.) meist als Zusammenhang zwischen einem Basissystem ohne Unterbrechung und einem Korrekturwert zur Berücksichtigung der Unterbrechungen beschrieben. Unter der Voraussetzung, dass die Zufallsgrößen X_0 und X_1 unabhängig voneinander sind, gilt folgender Zusammenhang:

$$X_v = X_0 + X_1 \quad (3)$$

mit:

- X_v : eine Zufallsgröße beim Bediensystem mit Unterbrechungen
- X_0 : eine Zufallsgröße beim Bediensystem ohne Unterbrechungen
- X_1 : eine Zufallsgröße als Ergebnis der Unterbrechung

Bei der Analyse von Bediensystemen mit Unterbrechungen werden häufig Verfahren verwendet, die unter dem Begriff „stochastische Zerlegung“ bekannt sind [Doshi90], [Takagi91]. Für die Bestimmung der Leistungskennzahlen der Warteschlangensysteme kommen insbesondere zwei analytische Verfahren zur Anwendung: Die Transformationsmethode (z. B. in [Kleinrock75] und [Takagi91]) sowie die analytische Matrix (z. B. in [Neuts84]).

Die Transformationsmethode basiert auf der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion und nutzt dabei Laplace- und z-Transformation. Das Prinzip beruht auf der Überlegung, dass die erzeugende Funktion der Summe unabhängiger Zufallsvariablen identisch ist mit dem Produkt der erzeugenden Funktionen dieser Variablen. Es bietet sich an, diese Transformationsmethoden zur Herleitung einer analytischen Leistungsbewertung des modifizierten Bediensystems zu verwenden.

Eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist nichts anderes als die Potenzreihen-Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion. Sei X eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable mit der Verteilung $x(i) = P\{X = i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, dann ist die zugehörige wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$EF(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^i \quad (4)$$

mit $|z| \leq 1$ als komplexwertige Variable. Weitere Eigenschaften dieser erzeugenden Funktionen sind nach [Gnedenko83]:

- Da die Summe beschränkt ist, konvergiert $EF(z)$ innerhalb und auf dem Einheitskreis $|z| \leq 1$. Somit ist die Verteilung der Zufallsgröße $P\{X = i\}$ eindeutig durch ihre erzeugende Funktion bestimmt.
- Durch Ableitungen der erzeugenden Funktion können die statistischen Momente der Zufallsvariablen berechnet werden.

Obwohl die Definition der erzeugenden Funktion sehr abstrakt ist, findet sie häufig Anwendung bei stochastischen Problemstellungen, insbesondere bei kombinatorischen Problemen.

3.1. Allgemeiner Lösungsansatz

Zunächst soll eine verallgemeinerte Form des M/D¹/1-Bediensystems betrachtet werden. Die Grundlage für die Untersuchung bildet das M/G/1-Modell mit mehreren Unterbrechungen. Wie bereits dargelegt, gibt es stets einen Zusammenhang zwischen einem Bediensystem mit Unterbrechungen und einem zugehörige Basis-Bediensystem (siehe Gleichung 3).

Daher vorab einige Anmerkungen zum M/G/1-System: Bei einem gewöhnlichen M/G/1-System ist der Bedienprozess diejenige Komponente, die nicht über die Markov-Eigenschaft verfügt. Die Markov-Eigenschaft bedeutet, dass alle Ereignisse der Vergangenheit im gegenwärtigen Zustand eines Prozesses abgebildet sind. Der weitere Prozessverlauf hängt nur noch vom gegenwärtigen Zustand ab. Es ist unerheblich, wie dieser Zustand erreicht wurde (Prozess mit fehlendem Erinnerungsvermögen).

Die Betrachtungen zu Warteschlangensystem, die nicht über die Markov-Eigenschaft verfügen, erfolgen mit der Methode der eingebetteten Markovkette. Zur ausführlichen Erläuterung der Methode der eingebetteten Markovkette wird auf die vorhandene Literatur verwiesen (z.°B. [TranGia96, Kap.4], [Bose02, Kap.3] und [Kleinrock75, Kap.5]).

Auf diese Weise kann eine Leistungsbewertung wie z.°B. die Verteilung der Forderungen im System und die Wartezeitverteilung einfacher berechnet werden. So ist beispielsweise die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten im M/G/1-System nach Pollaczek-Khintchine [Kleinrock75]:

$$EF_{N_s, M/G/1}(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)EF_{T_B}(z)}{EF_{T_B}(z) - z} \quad (5)$$

wobei $EF_{T_B}(z)$ die erzeugende Funktion der Zahl der Ankünfte während einer Bediendauer ist.

Im Folgenden wird ein Bediensystem M/G/1 mit mehreren Unterbrechungen betrachtet, wobei nach [Fuhrmann85] folgende Annahmen gelten:

- Der Ankunftsstrom ist ein Markov-Prozess, d.h., die Zahl der ankommenden Forderungen pro Zeitintervall ist poissonverteilt.
- Die Größe der Bedienzeit ist unabhängig von der Zwischenankunftszeit und ebenso unabhängig von einer möglicherweise vorausgegangenen Unterbrechung.
- Alle ankommende Forderungen werden bedient, d. h. die Warteschlange hat unbegrenzte Kapazität. Für den Auslastungsgrad gilt $\rho \leq 1$.
- Die Bedienung der Forderungen erfolgt in der Reihenfolge ihres Eintreffens (FIFO).
- Der Bedienprozess kennt keine Prioritäten: Jede Forderung wird ohne Unterbrechung bis zum Abschluss bedient.
- Die Zeitpunkte für Beginn und Ende der Unterbrechungen sind explizit definiert und unabhängig vom Ankunfts- und Bedienprozess.

Der Zahl der Forderungen in der eingebetteten Markovkette wird durch die verbleibende Anzahl der Forderungen im System während der Bedienung bestimmt. Beim Bediensystem mit Unterbrechung sind zusätzlich noch die Ankünfte, die während der Unterbrechungszeiten erfolgen, zu berücksichtigen. Da beides Zufallsgrößen sind, wird die resultierende Verteilung mittels Faltung bestimmt. Aufgrund der Eigenschaften der z-Transformation kann die Faltungsform als Multiplikation berechnet werden. Auf diese Weise ergibt sich die erzeugende Funktion für die Zahl der Forderungen beim M/G/1-System mit Unterbrechungen:

$$EF_{N_s, M/G_v/1}(z) = EF_{N_s, M/G/1}(z) \cdot EF_{N_s, V}(z) \quad (6)$$

Darin ist $EF_{N_s, M/G_v/1}(z)$ die erzeugende Funktion der Forderungen beim M/G/1 System ohne Unterbrechung. $EF_{N_s, V}(z)$ ist die erzeugende Funktion für die Zahl der Forderungen, die während der Unterbrechungszeiten ankommen. Sie ergibt sich nach [Fuhrmann84] zu:

$$EF_{N_s, V}(z) = \frac{1 - EF_{\Gamma_V}(z)}{(1-z)EF'_{\Gamma_V}(1)} \quad (7)$$

Darin beschreibt $EF_{\Gamma_V}(z)$ die erzeugende Funktion der Ankünfte während einer Unterbrechung und $EF'_{\Gamma_V}(1)$ deren erste Ableitung.

$$EF'_{\Gamma_V}(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \Gamma_V(j) z^{j-1} \Big|_{z \rightarrow 1} = \lambda \cdot E[t_V] \quad (8)$$

Aus den Gleichungen 5, 7 und 8 lässt sich damit die erzeugende Funktion der Zustandsverteilung für das M/G/1-Modell mit Unterbrechungen bestimmen:

$$EF_{N_s, M/G_v/1}(z) = \frac{(1-\rho)EF_{\Gamma_B}(z)}{EF_{\Gamma_B}(z) - z} \cdot \frac{(1 - EF_{\Gamma_V}(z))}{\lambda E[t_V]} \quad (9)$$

Für einen poissonverteilten Ankunftsstrom kann die erzeugende Funktion der Ankünfte $EF_{\Gamma_B}(z)$ während einer Bedienung (mit $f(t_b) = P\{T=t_b\}$ als Dichtefunktion der Bedienzeit) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} EF_{\Gamma_B}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_B(j) z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t_b)^j}{j!} e^{-\lambda t_b} f(t_b) dt_b z^j \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_b z)^j}{j!} e^{-\lambda t_b} f(t_b) dt_b \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t_b(\lambda - \lambda z)} f(t_b) dt_b \end{aligned} \quad (10)$$

Gleiches gilt für die erzeugende Funktion der Ankünfte während einer Unterbrechung (mit $f(t_v) = P\{T=t_v\}$ als Dichtefunktion der Unterbrechungsdauer)

$$EF_{\Gamma_V}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t_v(\lambda - \lambda z)} f(t_v) dt_v \quad (11)$$

3.2. Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten

Wendet man diese allgemeinen Lösungsansätze auf das betrachtete M/D/1-Modell an, sind folgende Besonderheiten zu beachten: Wegen der konstanten Bedienzeiten sind auch die Unterbrechungszeiten nicht mehr zufällig – die Bedienstation kann nur zum Ende der Bedienung mit einer Unterbrechung beginnen. Die Dauer ist stets ein ganzzahliges Vielfaches des Zeittaktes, weil nur zu diesen Zeitpunkten wieder eine Bedienung beginnen kann. Oder anders formuliert: Jede Unterbrechung ist von konstanter Dauer, es können aber mehrere Unterbrechungen nacheinander erfolgen. Das entspricht genau dem Ansatz eines Wartesystems mit mehreren Unterbrechungen.

Deterministische Bedien- und Unterbrechungszeiten bedeuten aber, dass die erzeugenden Funktionen beider Größen gleich sind. Für die Zahl der Forderungen im M/D/1-System kann daher ausgehend von Gleichung 9 die erzeugende Funktion wie folgt geschrieben werden.

$$EF_{N_s, M/D/1}(z) = \frac{(1-\rho)EF_{\Gamma_B}(z)}{EF_{\Gamma_B}(z) - z} \cdot \frac{(1 - EF_{\Gamma_B}(z))}{\lambda E[t_b]} \quad (12)$$

Wegen $E[t_b] = b$ und $\rho = \lambda \cdot E[t_b]$ gilt die Vereinfachung

$$EF_{N_s, M/D/1}(z) = \frac{(1-\rho)}{\rho} \cdot \frac{(1 - EF_{\Gamma_B}(z)) \cdot EF_{\Gamma_B}(z)}{EF_{\Gamma_B}(z) - z} \quad (13)$$

so dass nach Einsetzen von Gleichung 10 die erzeugende Funktion für die Verteilung der Forderungen im M/D/1-System dargestellt werden kann als

$$EF_{N_s, M/D/1}(z) = \frac{(1-\rho)}{\rho} \cdot \frac{(1 - e^{-b(\lambda-\lambda z)})e^{-b(\lambda-\lambda z)}}{e^{-b(\lambda-\lambda z)} - z} \quad (14)$$

Um die erzeugende Funktionen umzukehren und die Originalfunktion zu bestimmen, wird die Potenzreihen-Methode angewandt [Nelson95]. Zunächst wird Gleichung 14 erweitert

$$EF_{N_s, M/D/1}(z) = \frac{(1-\rho)(1 - e^{-b(\lambda-\lambda z)})}{\rho} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{e^{-b(\lambda-\lambda z)}} \right)^j \quad (15)$$

und mit Hilfe der Taylorreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ vereinfacht:

$$EF_{N_s, M/D/1}(z) = \frac{1-\rho}{\rho} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (e^{ip} z^j) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(jp)^k z^k}{k!} - e^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{((j-1)p)^k z^k}{k!} \right\} \right] \quad (16)$$

Letztendlich führt die Rücktransformation von Gleichung 16 unter Zuhilfenahme der Definition (Gleichung 4) zur Originalfunktion, mit der die Zustandswahrscheinlichkeiten und damit die Verteilung der Zahl der Forderungen im System bestimmt werden kann.

$$P_{M/D/1}\{N_s = n\} = \frac{1-\rho}{\rho} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{kp} (-1)^{n-k} \frac{\rho^{n-k}}{(n-k)!} (k^{n-k} - e^{-p} (k-1)^{n-k}) \right\} \quad (17)$$

Gleichung 17 kann allerdings nur berechnet werden für $n \geq 2$.¹ Zu den Lösungen für $n = 0$ und $n = 1$ gelangt man durch Ersetzung von $z = 0$ in die Gleichung 14 bzw. deren erste Ableitung.

$$P_{M/D/1}\{N_s = 0\} = \frac{(1-\rho)}{\rho} \cdot (1 - e^{-p}) \quad (18)$$

$$P_{M/D/1}\{N_s = 1\} = \frac{(1-\rho)}{\rho} \cdot (e^p - \rho e^{-p} - 1) \quad (19)$$

Für die praktische Anwendung der Gleichungen 17 bis 19 ergeben sich allerdings numerische Probleme, die zu scheinbaren Instabilitäten führen (Abb. 5). Ähnliche Probleme werden aber auch beim M/D/1-System beobachtet. [Roberts96] löst das Problem der numerischen Instabilität beim M/D/1-System durch Substitution der Berechnungsvorschrift für $n \geq N_u$ durch eine Exponentialfunktion, wobei N_u den Beginn der Instabilität quantifiziert.² Da das Verhalten der Zustandswahrscheinlichkeiten für eine höhere Zahl von Forderungen beim M/D/1-System ähnlich dem M/D/1-System ist, kann auch hier diese Methode angewandt werden. Demnach wird bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten eine Fallunterscheidung vorgenommen (Gleichung 20).

¹ In den Fällen $n = 0$ bzw. $n = 1$ entstehen Ausdrücke der Form 0^0 . Die Konvention $0^0 = 1$ ist zwar aus praktischen Gründen sinnvoll, weil sie die Formulierung vieler mathematischer Ausdrücke vereinfacht, rein mathematisch ist der Ausdruck aber unbestimmt: $a^0 = 1$ $0^0 = 0$.

² Die Unregelmäßigkeiten beginnen mindestens ab $N_u = 25$. Selbst Datentypen in Hochsprachen wie double (64 bit) oder long double (80 bit) erlauben gerade mal eine Genauigkeit von 15 bzw. 19 Stellen. Da aber z.B. $25! = 1,55E+25$ ist, kann dieser Wert nicht ohne Informationsverlust zwischengespeichert werden [Meinhardt06b].

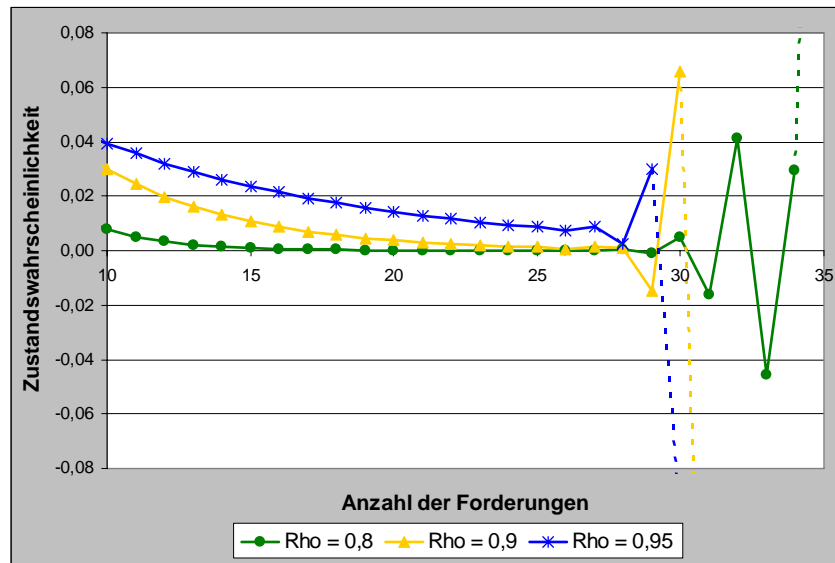


Abbildung 5: numerische Instabilität bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten für M/D/1

$$P_{M/D/1}\{N_s = n\} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{\rho}(1-e^{-\rho}) & n=0 \\ \frac{1-\rho}{\rho}(e^{\rho}-\rho \cdot e^{-\rho}-1) & n=1 \\ \frac{1-\rho}{\rho} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{k\rho} (-1)^{n-k} \frac{\rho^{n-k}}{(n-k)!} (k^{n-k} - e^{-\rho} (k-1)^{n-k}) \right\} & 2 \leq n < 25 \\ \lambda \cdot e^{-n\lambda} & n \geq 25 \end{cases} \quad (20)$$

wobei

$$\lambda = -\frac{\ln(1-P\{N \leq N_u\})}{N_u} \quad (21)$$

Durch Gleichung 21 wird berücksichtigt, dass nur noch die verbleibende Wahrscheinlichkeit ab dem Beginn der Unregelmäßigkeit in die Exponentialverteilung einfließt und dadurch eine gute Anpassung an die bisherige Verteilung erfolgt (Abb. 6).

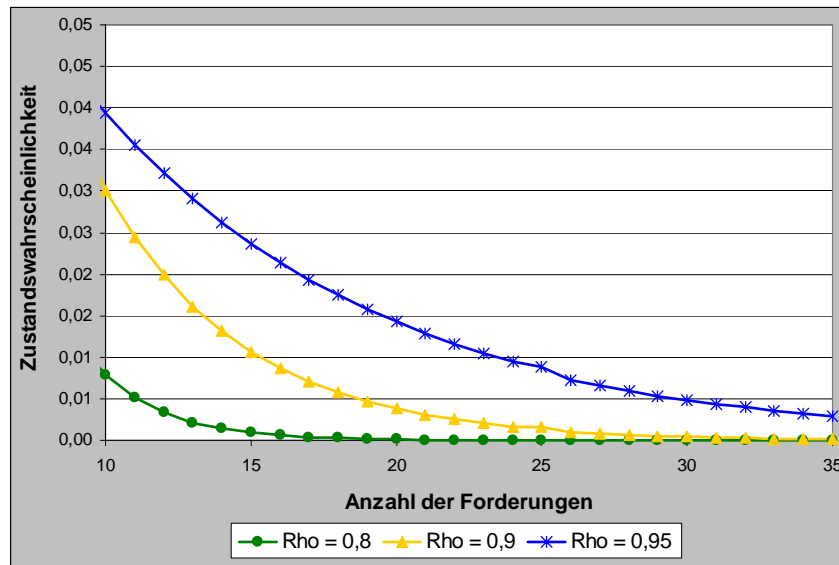


Abbildung 6: Zustandswahrscheinlichkeiten unter Nutzung der exponentiellen Näherung

3.3. Ableitung weiterer Kenngrößen des M/D'/1-Systems

Aufgrund der Eigenschaften der erzeugenden Funktion lassen sich weitere Kenngrößen bestimmen. So können durch Ableitung der erzeugenden Funktion im Punkt $z = 1$ die Anfangsmomente der Zufallsvariablen bestimmt werden. Insbesondere gilt für das erste und zweite Anfangsmoment [Gnedenko83]:

$$E[X] = EF'(1) \quad (22)$$

$$\text{Var}[X] = EF''(1) + EF'(1) - (EF'(1))^2 \quad (23)$$

Somit lässt sich zunächst der Mittelwert für die Zahl der Forderungen durch die erste Ableitung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten (Gleichung 14) im Punkt $z = 1$ bilden. Das führt zu:

$$P'_{EF,M/D'/1}(z) = \frac{\rho - 1}{\rho} \frac{z EF'_{I_B}(z)^2 (1 + EF'_{I_B}(z)) - EF_{I_B}(z) (1 + 2z EF'_{I_B}(z))}{(z - EF_{I_B}(z))^2} \quad (24)$$

Wird in Gleichung 10 für $z = 1$ sowie $E(t_b) = t_b$ eingesetzt, ergibt sich

$$EF_{I_B}(1) = 1 \quad (25)$$

$$EF'_{I_B}(1) = \lambda \cdot t_b = \rho \quad (26)$$

Durch Einsetzen der Gleichung 25 und 26 und $z = 1$ in 24 ergibt sich zunächst 0/0. Mithilfe der Regel von L'Hospital kann der Mittelwert der Forderungen bestimmt werden zu:

$$E[N_{s,M/D'/1}] = \rho + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \quad (27)$$

Nach dem Satz von Little [Kleinrock75] ergibt sich für die mittlere Verweilzeit

$$E[T_{s,M/D'/1}] = t_b + \frac{t_b}{2(1-\rho)} \quad (28)$$

Aus dem Satz von Little folgt ferner:

$$E[N_s] = E[N_w] + \frac{\lambda}{\mu} = E[N_w] + \rho \quad (29)$$

womit sich die mittlere Warteschlange und die mittlere Wartezeit berechnen lassen

$$E[N_{w,M/D'/1}] = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \quad (30)$$

$$E[T_{w,M/D/1}] = \frac{t_B}{2(1-\rho)} \quad (31)$$

Basierend auf Gleichung 23 kann ebenso die Varianz bestimmt werden. Dazu wird noch die zweite Ableitung von Gleichung 10 benötigt:

$$E F''_{t_B}(1) = \lambda^2 E(t_B)^2 = (\lambda t_B)^2 \quad (32)$$

Die Varianz der Zahl der Forderungen im System ergibt demnach:

$$\text{Var}[N_{s,M/D/1}] = \frac{\rho(18 - 29\rho + 14\rho^2)}{12(1-\rho)^2} \quad (34)$$

Die Tabelle 1 fasst die Ergebnisse zusammen und stellt sie denen des M/D/1-Systems gegenüber.

Tabelle 1: Vergleich der Systemcharakteristiken

Bediensystem	M/D/1	M/D'/1
$E[N_s]$	$\rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$	$\rho + \frac{\rho}{2(1-\rho)}$
$\text{Var}[N_s]$	$\frac{\rho(12 - 18\rho + 6\rho^2 + 7\rho^3 - 4\rho^4)}{12(1-\rho)^2}$	$\frac{\rho(18 - 29\rho + 14\rho^2)}{12(1-\rho)^2}$
$E[T_s]$	$\frac{t_B \cdot (2 - \rho)}{2(1-\rho)}$	$\frac{t_B \cdot (3 - 2\rho)}{2(1-\rho)}$
$E[N_w]$	$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$	$\frac{\rho}{2(1-\rho)}$
$E[T_w]$	$\frac{t_B \cdot \rho}{2(1-\rho)}$	$\frac{t_B}{2(1-\rho)}$

4. Anwendung des Verfahrens zur Bestimmung der Puffergröße

Zur Validierung und Verifizierung des vorgestellten analytischen Verfahrens werden die ermittelten Kennzahlen mit Simulationsergebnissen verglichen. Dazu wird auf das eingangs geschilderte einfache Beispiel verwiesen, bei dem zur Entkopplung von zwei Produktionsprozessen ein Zwischenpuffer vorgesehen ist (Abb. 2). Das Prinzip wurde bereits in [Meinhardt06a] diskutiert, allerdings mit einem wesentlichen Unterschied: Dort ging man von einem Fertigungssystem aus, bei welchem dem ersten Prozess die Ausgangsmaterialien bereits getaktet zugeführt werden.³ Im vorliegenden Fall wird dagegen angenommen, dass das Eintreffen der Ausgangsmaterialien zu beliebigen, zufälligen Zeitpunkten erfolgen soll.⁴

Zunächst zum Vergleich der analytischen Ergebnisse mit den Simulationsuntersuchungen: Eingangsgrößen in das Simulationsmodell waren

- ein poissonverteilter Ankunftsstrom mit $E[t_A] = 1$ min,
- die Taktzeit für Prozess B von $t_B = 0,8$ bzw. $0,95$ min und damit eine Auslastung von $\rho = 0,8$ bzw. $\rho = 0,95$
- sowie verschiedene Verteilungen für die Durchlaufzeit in Prozess A.

³ Das Beispiel bildet den Prozess A „Lackierung“ bei einem Hersteller in der Automobilindustrie nach, bei dem im vorgelagerten Bereich „Rohbau“ die Karosserie montiert wird. Um eine hohe Auslastung der Anlage zu erzielen, werden die Karossen im Takt der Lackierung zugeführt und sollen auch im Takt für den nachfolgenden Prozess B „Montage“ bereitgestellt werden.

⁴ Dieses Szenario tritt beispielsweise ein, wenn der erste Prozess A durch zufällige Ereignisse wie dem Eintreffen von Kundenaufträgen, Auslagerungsanforderungen an einem Hochregallager oder der nicht zeitgesteuerten Warenanlieferung durch einen Zulieferer ausgelöst wird.

Tabelle 2: Simulationsergebnisse verschiedener Durchlaufzeitvarianten für $\rho = 0,8$ bzw. $\rho = 0,95$

Auslastung ρ	Durchlaufzeit – gleich verteilt [min])				Forderungen im System	
	$t_{DLZ, \min}$	$t_{DLZ, \max}$	$E[t_{DLZ}]$	$\sigma[t_{DLZ}]$	$E[N_s]$	$\sigma[N_s]$
0,80	80	120	100,0146	11,5429	2,7985	2,5358
	60	140	100,0292	23,0859	2,7951	2,5275
	40	160	100,0438	34,6288	2,7945	2,5335
	20	180	100,0584	46,1717	2,7989	2,5162
	0	200	100,0730	57,7147	2,7992	2,5312
0,95	80	120	100,0146	11,5429	10,5694	10,6121
	60	140	100,0292	23,0859	10,5291	10,6118
	40	160	100,0438	34,6288	10,5078	10,5187
	20	180	100,0584	46,1717	10,4416	10,4140
	0	200	100,0730	57,7147	10,4134	10,2820

Eingangsparameter
Simulationsergebnisse

Die Ergebnisse der Simulationsläufe sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Es wird deutlich, dass die Durchlaufzeitverteilung für den Prozess A auf die Zahl der Forderungen im System keine Rolle spielt: Sowohl Mittelwert als auch Varianz (als Maß für die Streuung) sind gleich. Das ist für die Annahme von poissonverteilten Ankünften auch erwartet worden. Ebenfalls bestätigt wird die wachsende Zahl von Forderungen im System bei höheren Auslastungen ($\rho = 0,95$).

Als Nächstes wurden die Zustandswahrscheinlichkeiten aus der Simulation den berechneten Ergebnissen nach Gleichung 20 gegenübergestellt. Es konnte eine äußerst gute Übereinstimmung nachgewiesen werden (Abb. 8). Mit den Zustandswahrscheinlichkeiten wird die Verteilung der Anzahl von Forderungen im System beschrieben. Wie eingangs dargelegt, bedeutet dabei Zustand n , dass

- (1) entweder $n-1$ Forderungen in der Warteschlange sind und genau eine Forderung bedient wird (also gerade vom nachfolgenden Prozess B aus dem Puffer entnommen wurde),
- (2) oder n Forderungen warten und Prozess B keine Bedienung vornimmt (Unterbrechung). Letzteres ist aber für eine größere Zahl von Forderungen eher unwahrscheinlich, da dieser Fall nur eintreten kann, wenn bei einem leeren System innerhalb des nächsten Bearbeitungstaktes n Forderungen ankommen.

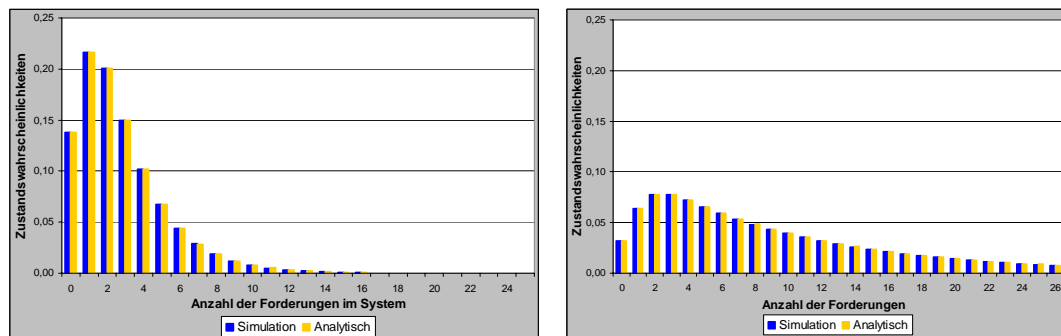


Abbildung 8: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den analytischen Berechnungen: Zustandswahrscheinlichkeiten für $\rho = 0,8$ (links) und $\rho = 0,95$ (rechts)

Für die optimale Puffergröße B_{opt} gilt, dass der Puffer mit einer bestimmten Sicherheit p ankommende Forderungen aufnehmen können muss. Bildet man also die Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten $P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$, dann ergibt dies die Wahrscheinlichkeit dafür, dass maximal $k-1$ Einheiten im Puffer sind. Die Summation muss solange vorgenommen werden, bis mit $k = B_{opt} + 1$ die kumulierten Zustandswahrscheinlichkeiten mindestens genauso groß sind wie die geforderte Sicherheit p .

$$\sum_{k=0}^{B_{opt}+1} P(X = k) = P(X \leq B_{opt}) \geq p \quad (34)$$

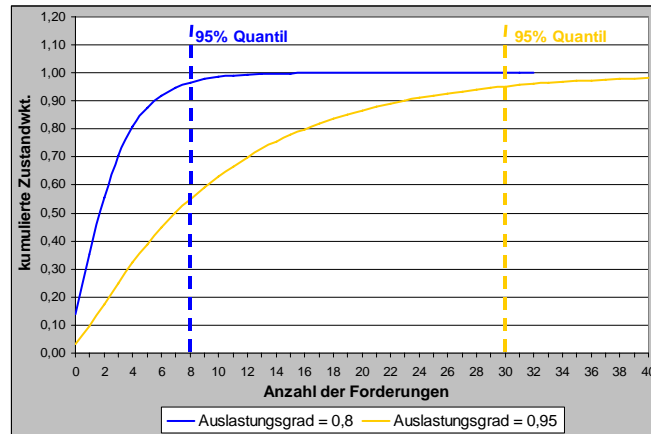


Abbildung 9: Kumulierte Zustandswahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der Quantile

In der Statistik ist es üblich, diese Größe als „p-Quantil“ zu bezeichnen. Eine gängige Größe im Bereich der Materialflussplanung ist z. B. $p = 0,95$ und bedeutet, dass in 95% der Fälle dieser Wert (im Beispiel die Zahl der Forderungen im System) nicht überschritten wird (Abb. 9).

$$B_{\text{opt}} = n - 1 \quad \text{mit} \quad P(X < n) \geq 0,95 \quad (35)$$

Schließlich erfolgte ein Vergleich von Mittelwert, Varianz und 95%-Quantil in Abhängigkeit von Auslastungsgrad ρ . Die Gegenüberstellung von Simulations- und analytischen Ergebnissen in Tabelle 3 weist im Allgemeinen nur geringe Abweichungen voneinander auf. Lediglich bei sehr hohen Auslastungen von $\rho \geq 0,97$ ergeben sich nennenswerte Abweichungen ($> 2\%$), die aber eher aus der Simulation (numerische Ungenauigkeit) resultieren.

Tabelle 3: Vergleich von Mittelwert, Varianz und 95%-Quantil der Warteschlange

Auslastungsgrad	Simulationsergebnisse			Analytisch mittels M/D/1			Abweichung		
	$E[N_s]$	$\text{Var}[N_s]$	95% Quantil	$E[N_s]$	$\text{Var}[N_s]$	95% Quantil	$E[N_s]$	$\text{Var}[N_s]$	95% Quantil
0,80	2,80	6,25	8,0	2,80	6,26	8,0	0,05%	0,20%	0,00%
0,81	2,94	6,89	8,0	2,94	6,91	8,0	0,06%	0,31%	0,00%
0,82	3,10	7,64	8,0	3,10	7,66	8,0	0,07%	0,32%	0,00%
0,83	3,27	8,53	9,0	3,27	8,56	9,0	0,08%	0,33%	0,00%
0,84	3,47	9,59	9,0	3,46	9,62	9,0	0,08%	0,37%	0,00%
0,85	3,68	10,89	10,0	3,68	10,91	10,0	0,05%	0,21%	0,00%
0,86	3,93	12,45	11,0	3,93	12,48	11,0	0,06%	0,26%	0,00%
0,87	4,22	14,45	12,0	4,22	14,44	12,0	0,00%	0,06%	0,00%
0,88	4,55	16,93	13,0	4,55	16,92	13,0	0,01%	0,08%	0,00%
0,89	4,94	20,12	14,0	4,93	20,10	14,0	0,02%	0,10%	0,00%
0,9	5,40	24,33	15,0	5,40	24,30	15,0	0,00%	0,12%	0,00%
0,91	5,97	30,03	17,0	5,97	29,99	17,0	0,00%	0,15%	0,00%
0,92	6,67	37,96	19,0	6,67	37,97	19,0	0,07%	0,02%	0,00%
0,93	7,57	49,51	22,0	7,58	49,64	22,0	0,06%	0,27%	0,00%
0,94	8,77	67,24	25,0	8,78	67,68	25,0	0,04%	0,65%	0,00%
0,95	10,45	96,86	30,0	10,45	97,69	30,0	0,04%	0,86%	0,00%
0,96	12,96	153,25	38,0	12,99	153,12	39,0	0,24%	0,08%	2,63%
0,97	17,14	276,03	50,0	17,23	273,27	52,0	0,54%	1,00%	4,00%
0,98	25,48	623,47	76,0	25,68	617,73	79,0	0,80%	0,92%	3,95%
0,99	50,49	2286,62	148,0	50,29	2484,41	157,0	0,40%	8,65%	6,08%

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Artikel wird ein analytisches Verfahren vorgestellt, mit dem die Dimensionierung von Puffern zur Prozessentkopplung bei poissonverteilten Ankunftsstrom und getakteter Entnahme bestimmt werden kann. Das Verfahren, bezeichnet als M/D/1, wurde auf der Basis eines Bediensystems mit mehreren Unterbrechungen entwickelt. Es erlaubt die Berechnung von Zustandswahrscheinlichkeiten, aus denen Kennzahlen zur Abschätzung der erforderlichen Puffergröße abgeleitet werden können. Dazu zählt neben Mittelwert und Varianz auch die Bestimmung von Quantilen.

Die Genauigkeit dieser Lösung wurde durch den Vergleich mit Simulationsuntersuchungen bestätigt. Generell konnte eine gute Übereinstimmung der Kennzahlen nachgewiesen werden. Außerdem zeigt die geringe Abweichung beim Vergleich der Systemcharakteristika, dass die ermittelten Kennzahlen für die Bemessung des Entkopplungspuffers geeignet sind.

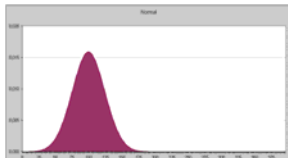

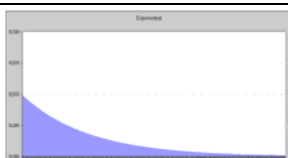
Das vorgestellte Verfahren ist allerdings nur anwendbar, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- Der Ankunftsprozess kann durch einen Poissonstrom beschrieben werden.
- Auslastungen sind stets kleiner als 1, das heißt, dass die Taktzeit des zweiten Prozesses geringer ist als der mittlere Zwischenankunftsabstand am ersten Prozess. Aus diesem Grund können nur reine Wartesysteme betrachtet werden.
- Es besteht die Möglichkeit des 'Überholens' von Forderungen innerhalb des ersten Prozesses: Bei längeren Durchlaufzeiten kann es vorkommen, dass früher angekommene Forderungen beim Durchlaufen durch den ersten Prozess aufgehalten werden, bestimmte Bearbeitungsschritte wiederholt ausführen oder nachbearbeitet werden müssen, sodass sie von nach ihnen (später) angekommenen Forderungen überholt werden können und damit erst später am Entkopplungspuffer eintreffen.

In [Meinhardt06a] wurde gezeigt, dass bei getaktetem Ankunftsstrom die Größe des Entkopplungspuffers ausschließlich durch die Durchlaufzeitverteilung bestimmt wird. Im hier betrachteten Fall eines Poissonstroms konnte dagegen nachgewiesen werden, dass die Durchlaufzeit keine Rolle spielt. Tabelle 4 fasst anhand des Beispiels (Abb. 2) die Ergebnisse zur Bestimmung der Puffergröße für einen getakteten [Meinhardt06a] bzw. poissonverteilten Ankunftsstrom zusammen.

Da in der Praxis die Zwischenankunftszeiten aber häufig auch anderen Verteilung als einer Poissonverteilung unterliegen, muss dann für die Bemessung der Puffergröße möglicherweise sowohl die Verteilung des Ankunftsstroms als auch die Durchlaufzeitverteilung berücksichtigt werden. Durch Überlagerung beider Verteilungen wird die analytische Berechnung der erforderlichen Puffergröße komplizierter und kann möglicherweise nicht mehr mithilfe der Warteschlangentheorie gelöst werden.

Tabelle 4: Auswirkung unterschiedlicher Verteilungen für Ankunftsstrom und Durchlaufzeit auf die erforderliche Größe des Entkopplungspuffers

Ankunftsstrom	Durchlaufzeit-Verteilung		Puffergröße (95%-Quantil)
getaktet	 Normalverteilung $E(t_{DLZ}) = 100, V(t_{DLZ}) = 625$ $t_{DLZ,min} = 0, t_{DLZ,max} = 200$	$\rho = 1$	15
	 Gleichverteilung $E(t_{DLZ}) = 100, V(t_{DLZ}) = 3333$ $t_{DLZ,min} = 0, t_{DLZ,max} = 200$	$\rho = 1$	23
	 Exponentialverteilung $E(t_{DLZ}) = 100, V(t_{DLZ}) = 10000$ $t_{DLZ,min} = 0, t_{DLZ,max} = \infty$	$\rho = 1$	28
beliebig	?		?
poisson	beliebig	$\rho = 0,95$ $\rho = 0,98$ $\rho = 0,99$	30 79 157

Symbole

$E[X]$	Erwartungswert bzw. erstes Moment einer Zufallsvariablen X
$E[X^2]$	Zweites Moment der Zufallsvariable X
$\text{Var}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen X
$x(i) = P\{X = i\}$	Verteilung der nicht negativen ganzzahligen Zufallsvariablen X als Wahrscheinlichkeit für die Realisierung i der Zufallsvariablen X
$P\{N_s = n\}$	Zustandswahrscheinlichkeit, dass n Forderungen im System sind
N_s	Anzahl der Forderungen im System
N_w	Anzahl der wartenden Forderungen im System
N_b	Anzahl der Forderungen in der Bedienstation
$E[t_A]$	mittlere Zwischenankunftszeit
$E[t_b]$	mittlere Bedienzeit (bei deterministischen Vorgängen: $E[t_b] = t_b$)
ρ	Auslastungsgrad
$EF_{x(i), xxx}(z)$	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariablen X mit der Verteilung $x(i) = P\{X = i\}$ für das Bedienmodell xxx
$EF_{FB}(z)$	Erzeugende Funktion der Poissonankünfte während einer Bediendauer
$EF_{UV}(z)$	Erzeugende Funktion der Ankünfte während einer Unterbrechung

Literatur

- [Bell80] Bell, Peter C.: A decoupling inventory problem with storage capacity constraints. In: Operations Research, 28 (1980) no. 3, S. 476-488.
- [Bose02] Bose, S.K.: An introduction to queuing systems. New York : Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002
- [Doshi90] Doshi, B.: Single server queues with vacations. In: Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems (Hideaki Takagi, ed.): Elsevier Science Publishers B.V., 1990, S. 217-265.
- [Fuhrmann84] Fuhrmann, S.W.: A note on the M/G/1 queue with server vacations. In: Operations Research, 32 (1984) no. 6, S. 1368-1373
- [Fuhrmann85] Fuhrmann, S.W., Cooper, Robert B.: Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations. In: Operations Research, 33 (1985), no. 5, S. 1117-1129
- [Gnedenko83] Gnedenko, B.W., König D.: Handbuch der Bedienungstheorie I-Grundlagen und Methoden. Vol. 1, Akademie-Verlag Berlin, 1983
- [Guest91] Guest, Paul B. : Laplace transforms and an introduction to distributions, Horwood, 1991
- [Herer02] Herer, Yale T., Tzur, M., Yücesan, E.: Transshipments: An emerging inventory recourse to achieve supply chain leagility, International Journal of Production Economics 80 (2002), no. 3, S. 201–212 DOI:10.1016/S0925-5273(02)00254-2
- [Kleinrock75] Kleinrock, L.: Queueing systems volume 1: Theory. Vol. 1. John Wiley and Sons, Inc., Canada, 1975
- [Meinhardt06a] Meinhardt, I., Sunarjo, F. Marquardt, H.-G.: Methode zur Dimensionierung von Entkopplungspuffern in dynamischen Fertigungsprozessen. In: Logistics-Journal ISSN: 1860-5923, 5(2006)
<http://www.elogistics-journal.de/archiv/2006/5/meinhardt/Meinhardt2006.pdf>
DOI 10.2195/LJ_Not_Ref_Meinhardt_042006
- [Meinhardt06b] Meinhardt, I., Marquardt, H.-G.: Offenes Baukastensystem zur effizienten Dimensionierung von Materialflusssystemen, Abschlussbericht AIF-Projekt, Institut für Fördertechnik, Baumaschinen und Logistik - Technische Universität Dresden, 2006,
<http://logistics.de/logistik/beschaffung.nsf/f1b7ca69b19cbb26c12569180032a5cc/a58ec7d80bbf2d21c125724a003e41a4!OpenDocument>
- [Moron03] Kisperska-Moron, D.: Responsibility for inventory decisions in polish manufacturing companies. In: International Journal of Production Economics, 81-82 (2003), S.129–139 DOI:10.1016/S0925-5273(02)00285-2
- [Nelson95] Nelson, R.: Probability, stochastic processes, and queueing theory, Springer Verlag, 1995

- [Neuts84] Neuts, Marcel F.: Matrix-analytic methods in queuing theory. In: European Journal of Operational Research, 15 (1984), no. 1, S. 2–12 DOI:10.1016/0377-2217(84)90034-1
- [Roberts96] Roberts, J., Mocchi U., Virtamo, J. (ed.): Broadband network teletraffic - performance evaluation and design of broadband multiservice networks, Final report of action cost 242, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1155, Springer-Verlag, 1996
- [Takagi91] Takagi, H.: Queueing analysis-a foundation of performance evaluation: Vacation and priority systems, part 1, vol. 1, Elsevier Science Publishers B.V., 1991.
- [TranGia96] Tran-Gia: Analytische Leistungsbewertung verteilter Systeme, Springer, 1996.
- [VanDonk01] Van Donk, D.P.: Make to stock or make to order: The decoupling point. In: International Journal of Production Economics, 69 (2001), no. 3, S. 297–306 DOI:10.1016/S0925-5273(00)00035-9
- [Vercellis99] Vercellis, C.: Multi-plant production planning in capacitated self-configuring two-stage serial systems. In: European Journal of Operational Research 119 (1999), no. 2, S. 451–460 DOI:10.1016/S0377-2217(99)00146-0